RATIO

Heft 1 16. Band

1974

SONDERDRUCK

FELIX MEINER VERLAG HAMBURG

Zum Antinomienproblem der Logik

Von Dieter Wandschneider

1. Wenn hier von „Antinomien“ die Rede ist, dann nur in einem eingeschränkten Sinne. Weder die berühmten Zenonischen Antinomien der Bewegung noch Kants Antinomien der „transzendentalen Dialektik“ bilden den Gegenstand dieser Untersuchung, sondern allein die sog. Antinomien der Logik. Sie sind dadurch charakterisiert, daß sich, scheinbar im Einklang mit allen Regeln der Logik, ein Satz *und* dessen Negation *beweisen* läßt[1a]. Geläufige Beispiele sind die „Wahrheitsantinomie“ („Dieser Satz ist falsch“) oder die „Russellsche Antinomie“ der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Daß beweisbare Widersprüche möglich sind, mußte auf seiten der Logik als Bedrohung ihres scheinbar so gesicherten Bestandes empfunden werden. Verständlich daher das permanente Interesse an „Lösungen“, vom Altertum und der Scholastik bis hin zur modernen Logik, deren „Grundlagenproblem“ mit dem Antinomienproblem innig verbunden ist: eine Situation, die zu Ansätzen und Entwicklungen geführt hat, deren Konsequenzen nicht auf die Logik im engeren Sinne beschränkt blieben, sondern das heutige Verständnis von „Sprache“ und selbst „Wirklichkeit“ wesentlich mitgeprägt haben. Man denke an die längst geläufige Unterscheidung von Objekt- und Metasprache, die Typenhierarchie der Eigenschaften oder das quasi-ontologische Problem der Existenz von Mengen. Wir allerdings meinen, daß derartige, heute weithin akzeptierte Vorstellungen von Logik und Sprache letztlich unbefriedigend und, von der Logik her, daher einer Revision bedürftig und auch fähig sind.

2. Um zu sehen, daß das Antinomienproblem zunächst kein bloß akademisches, bloß innerlogisches Problem ist, braucht man nicht den berüchtigten Barbier zu bemühen, der alle Leute rasiert, die sich nicht selbst rasieren, der sich mithin paradoxerweise weder selbst rasiert noch nicht rasiert[2a]. Schon dem Kinderwort „ich verrate dir nicht, daß ich Fritz heiße“ ist „Antinomisches“ beigemischt. Ähnlich wenn ich zugebe, daß mich eine Angelegenheit „mehr bedrückt als ich zugebe“. Und auf die Frage „schläfst du?“ darf ich genau dann mit Ja antworten (weil ich tatsächlich schlafe), wenn ich *nicht* mit Ja antworten darf (denn antworte ich mit Ja, schlafe ich schon nicht mehr)[2b]. Schließlich: wer seine positiven Eigenschaften nicht herausstreicht, wird „bescheiden“ genannt und wäre damit zu der Aussage „ich bin bescheiden“ legitimiert. Freilich, spricht er dies tatsächlich aus, so spricht er doch von eigenen positiven Eigenschaften, denn Bescheidenheit gilt selbst als eine solche, und er kann strenggenommen *nicht* mehr als bescheiden gelten. Unterbleibt die Aussage daraufhin, so wäre

[1a] Stegmüller WAHRHEITSPROBLEM 24.
[2a] Cf. z. B. Quine POINT 133, v. Kutschera ANTINOMIEN 41, W. R. Fuchs MATHEMATIK 157 f.
[2b] Den Hinweis auf dieses Beispiel verdanke ich Frau Dr. Ruth-Eva Schulz-Seitz, Tübingen.

sie nun doch wieder legitim, usw. Kurz, ich darf nur dann behaupten, ich sei bescheiden, wenn ich eben dieses *nicht* behaupte.

3. „Antinomisches“ ist so auch in schlichter Alltäglichkeit schon zu entdecken. Aber es bleibt auf solche, mehr spielerische Anwendungsfälle, die unversehens auch ins Witzige, Ironische, Poetische hinüberspielen können, nicht beschränkt. Der Verdacht liegt nahe, daß insbesondere „die großen Probleme“ etwas von Antinomie in sich haben. Es gab — oder gibt — ein „Subjekt-Objekt-Problem“, das formal so charakterisierbar ist, daß das Subjekt, um erkannt werden zu können, zum Objekt werden muß und damit gerade *nicht* mehr Subjekt ist. Unmittelbar damit hängt das konkretere Problem des „Selbstbezugs“ reflexiver Systeme zusammen. Wir vermuten ferner, ohne das jetzt näher zu begründen, daß das Antinomienproblem auch für Probleme aus dem Bereich der „Philosophy of Science“ Relevanz besitzt — wir denken hier insbesondere an das Zeitproblem oder das Problem der „Kraft“. Auf weitreichende Konsequenzen für eine Theorie der Sprache hatten wir schon hingewiesen. In diesem Sinne, so glauben wir, kommt dem Antinomienproblem eine Art Schlüsselfunktion bei der Aufklärung auch ganz andersartiger Probleme zu. Diese Überzeugung bildet den Motivationshintergrund der vorliegenden Arbeit, vorerst freilich nur den Hintergrund, da eine Klärung der „rein logischen“ Problematik zunächst vordringlich erscheint. Wir verzichten darauf, die Ergebnisse dieser Untersuchung vorwegnehmend aufzuzählen und beschränken uns darauf, dies erst im Anschluß an die stattgehabte Diskussion zu tun. Um die Fragestellung zu entwickeln, beginnen wir mit einer kurzen historischen Rückblende.

4. Die berühmte *Russellsche Antinomie* der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten (B. Russell 1901),[4a] ergibt sich in bekannter Weise aus dem „naiven“ Komprehensionsschema[4b] (Mengenbildungsschema)

(4.1) $$\bigvee_y \bigwedge_x \; x \, \varepsilon \, y \longleftrightarrow \phi(x),$$

in Worten: Es gibt eine Menge y, so daß für alle Gegenstände x gilt: x ist Element von y genau dann, wenn x die Aussageform $\phi(x)$ erfüllt. Mit $\phi(x) = \neg\, x \, \varepsilon \, x$ (d. h.: x enthält sich nicht selbst als Element) wird daraus

(4.2) $$\bigvee_y \bigwedge_x \; x \, \varepsilon \, y \longleftrightarrow \neg\, x \, \varepsilon \, x,$$

was für $x = y$ zu der Kontradiktion

(4.3) $$y \, \varepsilon \, y \longleftrightarrow \neg\, y \, \varepsilon \, y$$

führt, in Worten: Die Menge y enthält sich selbst als Element genau dann, wenn y sich *nicht* selbst als Element enthält[4c]. Russell versuchte diesen Widerspruch, der die scheinbar gesicherten Grundlagen des Fregeschen Systems einer modernen Logik wieder in Frage stellte, durch die sog. „*Typentheorie*“ zu beheben[4d]. Und zwar in der Weise, daß Terme von der Form $x \, \varepsilon \, x$ von vorn-

[4a] Cf. Sluga FREGE 198.
[4b] Cf. Stegmüller MENGENLEHRE 69.
[4c] Daß x und y hier Mengen sind, ist irrelevant: dieselbe Argumentation läßt sich ebenso für Eigenschaften und Relationen durchführen.
[4d] Russell PRINCIPLES App. B und Russell PM Introd. Chapt. B.

herein als unzulässig ausgeschlossen werden, genauer: es wird postuliert, daß die Elemente einer Menge und die Menge selbst Gebilde von unterschiedlichem „Typ" sind. Nach dieser „Typenregel", die der Menge einen (um eins) höheren Typ als ihren Elementen zuordnet, kann $x \varepsilon x$ kein zulässiger Term mehr sein, da x hier sowohl als Menge wie auch als Element dieser Menge auftritt. Die Antinomie kann dann nicht mehr abgeleitet werden, da (4.2) von vornherein unzulässig ist. Russell selbst sah in diesem Verfahren mehr als einen technischen Trick. Die Typentheorie, so Russell, „has also a certain consonance with common sense which makes it inherently credible"[4e]. Russell kann sogar auf Argumente Freges zurückgreifen, der bereits eine Art Stufenordnung für Dinge, Eigenschaften, Eigenschaften von Eigenschaften usw. konstatiert hatte[4f]. Parallel dazu können Dinge, Mengen, Mengen von Mengen usw. unterschieden werden. Man denke an Sätze der Art „der Mensch *W* ist ein Wiedertäufer" und „die Wiedertäufer sind eine christliche Sekte". Es ist deutlich, daß daraus *nicht* folgt: „der Mensch *W* ist eine christliche Sekte". Der Grund: nicht der einzelne Wiedertäufer *W*, sondern das Kollektiv der Wiedertäufer insgesamt ist seinerseits Element aus der Menge der christlichen Sekten. Derartige „Stufungsphänomene" bei Eigenschaften oder Mengen werden auch heute noch als Beleg für die Notwendigkeit einer Typenordnung angeführt[4g].

5. Das Russellsche System der Typen bleibt gleichwohl unbefriedigend. Es zwingt, konsequent durchgeführt, einerseits zu umständlichen und unnatürlichen Unterscheidungen, worauf besonders Quine nachdrücklich hingewiesen hat[5a]. Andererseits, und darauf soll hier das Hauptaugenmerk liegen, ist das Stufungsargument nicht durchschlagend: Es gibt offenkundig *auch* Sätze von der Form $x \varepsilon x$, $x \varepsilon y \wedge y \varepsilon x$ u. ä., die dennoch sinnvoll sind und somit nicht einfach für unzulässig erklärt werden können. Die Klasse *M* der Menschen ist offenbar selbst kein Mensch, d. h. die Klasse *M* enthält sich nicht selbst als Element, $\neg\, M \varepsilon M$. Oder: Die Klasse *NM* der Nicht-Menschen (also Dinge, Pflanzen, Tiere, Begriffe usw.) ist selbst ebenfalls ein Nichtmensch, d. h. die Klasse *NM* enthält sich selbst als Element, $NM \varepsilon NM$[5b]. Derartige Sätze werden durch die Typenregel einfach eliminiert.

6. Weitere Zweifel hinsichtlich der Nützlichkeit der Typentheorie müssen sich einstellen, wenn die sog. *Grellingsche Antinomie*[6a] in die Betrachtung einbezogen wird: Es sei „$\underline{x}$" die Namensbezeichnung für eine Eigenschaft x, z. B. „*rot*" für die Eigenschaft „rot". Es wird nun eine Eigenschaft „heterologisch" als diejenige Eigenschaft von Namen definiert, die einem Namen zukommt, wenn er selbst nicht die Eigenschaft besitzt, die er bezeichnet. Z. B. ist der Ausdruck „*zweisilbig*" heterologisch, weil er selbst nicht zweisilbig ist. Frage: ist

[4e] Russell/Whitehead PM 37.
[4f] Cf. Sluga FREGE 197, 206.
[4g] Cf. z. B. Carnap EINFÜHRUNG § 21 b, Stegmüller WAHRHEITSPROBLEM 78 f., Essler LOGIK 167 f.
[5a] Cf. Quine NF 91, Quine ML 164.
[5b] Letzteres Beispiel stammt von Russell selbst, cf. Sluga FREGE 208.
[6a] Cf. Grelling/Nelson PARADOXIEN (1907/08).

„*heterologisch*" selbst heterologisch? In diesem Fall folgt aus der allgemeinen Definition für „heterologisch" (abgekürzt: „het")

$$(6.1) \qquad \bigwedge_{\underline{x}} \underline{x}\, \varepsilon\, het \longleftrightarrow \neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, x$$

mit $x = het$ sofort die Kontradiktion

$$(6.2) \qquad \underline{het}\, \varepsilon\, het \longleftrightarrow \neg\, \underline{het}\, \varepsilon\, het.$$

Hier muß zweierlei auffallen: Einerseits gleicht diese Antinomie der Russellschen, d. h. die Ableitung des Widerspruchs folgt in beiden Fällen demselben Deduktionsschema. Andererseits ist die Typenregel, mit der der Russellsche Widerspruch noch beseitigt werden konnte, hier offenkundig wirkungslos, da ein Ausdruck von der Form $\underline{x}\, \varepsilon\, x$ *nicht* gegen die Typenregel verstößt ($\underline{x}$ ist ein Individuum und x eine Eigenschaft, wie es die Regel gestattet). Russell selbst hatte diesem Umstand durch Erweiterung der „einfachen" Typentheorie zur „verzweigten" Rechnung zu tragen versucht, während Chwistek und dann Ramsey entdeckten, daß die einfache Unterscheidung von „Objektsprache" und „Metasprache", wie wir heute sagen, bereits ausreicht, um die Grellingsche Antinomie zu vermeiden[6b]: Die Eigenschaft x wird der Objektsprache zugerechnet, die Namensbezeichnung $\underline{x}$ und die mit ihrer Hilfe neu definierte Eigenschaft *het* dagegen der Metasprache, so daß *het* nicht in den Bereich x fällt und insofern auch nicht für x substituiert werden darf. Und *het* wiederum kann keine Eigenschaft sein, die der Namensbezeichnung $\underline{het}$ selbst zukommen könnte, da *het* nicht mehr der Metasprache, sondern der noch einmal übergeordneten Metametasprache angehören würde: Die hier durchgeführte Aufsplitterung in Objekt- und Metasprache hat so auch die Konsequenz, daß in einer Sprache nicht mehr über diese Sprache selbst gesprochen werden kann.

7. Dieses Verfahren, in Tarskis Formulierung: die Preisgabe der „semantischen Geschlossenheit" von Sprache[7a], ermöglicht auch in anderen Fällen die Beseitigung von Antinomien. Ein populäres Beispiel ist die „*Wahrheitsantinomie*", die sich z. B. aus der Formulierung „dieser Satz ist falsch" ergibt (ist er falsch, dann ist er wahr, ist er wahr, dann ist er falsch, usw.): Das Prädikat „falsch" wird jetzt als metasprachliches Prädikat betrachtet, das auf den metasprachlichen Satz, in dem es selbst vorkommt, nicht mehr angewendet werden darf. Das Verfahren arbeitet einwandfrei. Es kann sogar, ähnlich wie die Typeneinteilung, eine gewisse unmittelbare Plausibilität für sich geltend machen — die Metasprache spricht *über* die Objektsprache und ist daher im Vergleich mit dieser eine *andere* Sprache —, eine Plausibilität, die freilich Einbuße erleidet angesichts der daraus resultierenden Umständlichkeiten bei der Definition des Wahrheitsbegriffs[7b], verbunden mit der dubiosen Konsequenz, daß es grundsätzlich nicht möglich sein soll, in einer Sprache über diese Sprache selbst zu sprechen: Genau das geschieht in der Umgangssprache ständig, erst

[6b] Cf. Bochenski LOGIK 462 f.
[7a] Cf. Tarski WAHRHEITSBEGRIFF.
[7b] Cf. z. B. Stegmüller WAHRHEITSPROBLEM.

recht in Sprachwissenschaft und Sprachphilosophie, die ohne einen solchen Selbstbezug gar nicht möglich wären. Und Wittgensteins Satz „kein Satz der Sprache kann etwas über sich selbst aussagen"[7c], straft sich selbst Lügen, da er seiner Intention nach selbstverständlich auch über sich selbst aussagt.

8. Überdies hätte auffallen müssen, daß für Probleme von wesentlich *gleicher Struktur*, wie das für die Russellsche und die Grellingsche Antinomie zutrifft, gleichwohl ein jeweils eigenes Lösungsverfahren erfordert sein soll. Aber man begnügte sich damit, parallel zu der Zweiheit der Lösungsverfahren die auf Ramsey[8a] zurückgehende Klassifizierung der Antinomien in *logisch-mathematische* und *linguistische* (syntaktische und semantische) weitgehend beizubehalten[8b]. Wenn nun die Typentheorie zwar für die Russellsche, nicht aber für die strukturgleiche Grellingsche Antinomie, die Sprachstufung (Trennung von Objekt- und Metasprache) umgekehrt für die Grellingsche, nicht aber für die strukturgleiche Russellsche Antinomie kompetent sein soll, dann muß, schon aus diesem Grund, der Verdacht aufkommen, daß beide Verfahren dem Problem selbst nicht recht angemessen, sondern mehr oder weniger ad hoc sind. Daß sie darüberhinaus ungute Konsequenzen haben (cf. § 5, 7), läßt beide Verfahren insgesamt unbefriedigend erscheinen.

9. Dies hat dazu geführt, daß seit der Entwicklung der Typentheorie wiederholt alternative Ansätze für das Antinomienproblem versucht worden sind — wegen seiner Relevanz für die Grundlegung der Mengenlehre in erster Linie für das Russellsche Problem. Hierbei lassen sich zwei Hauptrichtungen unterscheiden: Einmal der Versuch, die Typentheorie durch Liberalisierung immer besser an das Problem anzupassen, hier ist vor allem Quine zu nennen. Zum anderen das auf Zermelo zurückgehende Programm eines axiomatischen Aufbaus der Mengenlehre, das später von v. Neumann, Fraenkel, Bernays weitergeführt worden ist. Auf eine Wiedergabe der historischen Entwicklung müssen wir hier freilich verzichten und verweisen stattdessen auf die detaillierte Darstellung in Quine, *Set Theory and its Logic,* 3. Teil. Ein kürzerer Abriß findet sich auch in Quine ML (163 ff.) sowie in Stegmüllers Aufsatz „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, beruhend auf den Systemen von Bernays und Quine". Wie aus dem Titel dieser letzteren Arbeit hervorgeht, wird hier übrigens der Versuch unternommen, Quines Ansatz in das axiomatische System einzubringen und eine Synthese herbeizuführen. Für eine Untersuchung der grundsätzlichen Aspekte bietet sich hier ein günstiger Anknüpfungspunkt.

10. Ein Hauptpunkt in Stegmüllers System kann leicht am Beispiel des Russellschen Problems verdeutlicht werden. Die „naive" Komprehensionsbedingung, die zur Russellschen Antinomie führt (cf. § 4), wird hier ersetzt durch das modifizierte Komprehensionsschema

(10.1) $\bigvee_y \bigwedge_x \, x \, \varepsilon \, y \longleftrightarrow \Phi(x) \wedge Mg\, x.$

Entscheidend ist der Term *Mgx*, der besagt, daß x selbst Element (irgendeiner Klasse) ist, d. h. es gibt eine solche Klasse z, in der x Element ist:

(10.2) $\bigwedge_x Mg\, x \longleftrightarrow \bigvee_z x \, \varepsilon \, z.$

Gilt $Mg\, x$, so wird x als „*Menge*" bezeichnet. (10.1) ist dann zu lesen: x ist Element einer Klasse y genau dann, wenn $\Phi(x)$ gilt und wenn x eine „Menge" ist. Was folgt nun im Fall der Aussageform $\Phi(x) = \neg\, x \, \varepsilon \, x$, die früher zur Russellschen Antinomie geführt hatte? Sei N die zugehörige Klasse y, deren Existenz in (10.1) behauptet wird. Wird nun N selbst für x substituiert, so folgt

(10.3) $N \, \varepsilon \, N \longleftrightarrow \neg\, N \, \varepsilon \, N \wedge Mg\, N$

mit der Konsequenz

(10.4) $\neg\, Mg\, N,$

d. h. statt des Russellschen Widerspruchs ergibt sich hier, daß N eine Klasse mit *Nichtmengen*-Charakter ist.

11. Der offenkundige Vorteil gegenüber der Typentheorie ist der, daß nun auch, wie wir eben sahen, Aussageformen der Art $x \, \varepsilon \, x$ bzw. $\neg\, x \, \varepsilon \, x$ zugelassen und nicht mehr als sinnlos ausgeschlossen sind. Auf diese Weise kann immerhin die Klasse N der *Mengen x*, die nicht Selbstelemente sind, gebildet werden. Ein Nachteil ist freilich darin zu sehen, daß dieser Ansatz — wie die Typentheorie — die mit der Russellschen Antinomie strukturgleiche Grellingsche Antinomie *nicht* löst. Dieses Argument mag pedantisch oder gar abwegig klingen, denn schließlich, so könnte eingewendet werden, war nur eine Axiomatisierung der *Mengenlehre* intendiert[11a]. Trotzdem, mit Hinweis auf oben Gesagtes (cf. § 8) mag es erlaubt sein, in dieser Einschränkung weniger eine Tugend als einen Schönheitsfehler zu erblicken, der freilich den Verdacht begünstigt, daß das Problem noch nicht voll getroffen ist. Dieser Eindruck verstärkt sich bei dem Versuch, das Resultat $\neg\, Mg\, N$ (10.4) inhaltlich zu interpretieren. $\neg\, Mg\, N$ bedeutet nach (10.2), daß es keine Klasse z geben kann, die N als Element enthält. Nun sind Klassen unter intensionalem Aspekt als Eigenschaften zu interpretieren[11b]. Daß es keine Klasse gibt, die N als Element enthält, bedeutet somit, daß es keinerlei Eigenschaft gibt, die N zukäme, N müßte absolut bestimmungslos sein, es könnte schlechterdings *nichts* von ihm ausgesagt werden. Dieses Resultat muß verblüffen, denn es gibt im Gegenteil manches, was von N mit Sicherheit prädiziert werden kann: z. B. daß es ein „theoretisches Konstrukt" ist, das als solches wohl „abstrakt" genannt werden und so auch „Objekt einer logischen Untersuchung" sein kann. Stegmüller selbst charakterisiert N als „Term", von dem überdies präzise festgestellt wird, er sei „zulässig und bezeichnet eine Klasse (die Klasse aller *Mengen*, die keine Selbstelemente sind).

[7c] Wittgenstein TRAKTAT 3.332.
[8a] Ramsey FOUNDATIONS.
[8b] Cf. z. B. Stegmüller METAPHYSIK 224, Lyndon LOGIC 80 f., Quine PARADOX 13. Eine Ausnahme bilden v. Kutschera ANTINOMIEN und K. Lorenz ELEMENTE 44. Beide konstatieren die Strukturgleichheit der Russellschen und der Grellingschen Antinomie. v. Kutschera insbesondere macht ein einziges Prinzip („fehlerhafte Zirkularität") für das Auftreten von Antinomien überhaupt verantwortlich, cf. § 13.

[11a] Zweifellos könnte leicht eine Zusatzbedingung gefunden werden, die die Grellingsche Antinomie in ähnlicher Weise beseitigt wie Mg x dies für die Russellsche leistet. Es käme aber wohl vor allem darauf an, Beliebigkeiten in der Wahl solcher Zusatzterme möglichst auszuschalten.
[11b] Cf. z. B. Carnap MEANING.

Diese Klasse ist eine Nichtmenge . . ."[11c]. Insofern ist das Ergebnis $\neg Mg\,N$ in inhaltlicher Deutung kaum überzeugend: Im Hinblick auf die genannten Attribute, die sich von N prädizieren lassen, müßte es *doch* Klassen geben, die N als Element enthalten, z. B. die Klasse der abstrakten Gegenstände oder die Klasse der Nichtmengen, so daß man eher geneigt wäre, $Mg\,N$ als $\neg Mg\,N$ für richtig zu halten, womit dann freilich aus (10.3) sofort wieder die Russellsche Kontradiktion $N \varepsilon N \longleftrightarrow \neg N \varepsilon N$ folgen würde. Schärfer: würde N, gerade aufgrund des Resultats $\neg Mg\,N$, als Element einer Klasse (nämlich der Klasse der Nichtmengen) aufgefaßt, so müßte *eben deshalb* zugleich $Mg\,N$ gelten, und $\neg Mg\,N$ *selbst* wäre insofern bereits eine antinomische Bestimmung.

12. Deutungsschwierigkeiten ergeben sich ferner in bezug auf die von Stegmüller eingeführte „dreifache kategoriale Unterscheidung", die er aufgrund dieser Überlegungen postuliert: „Die drei Kategorien: Menge, Klasse, Aussageform fallen also auseinander, und zwar stellen sie in dieser Reihenfolge Begriffe von zunehmender Reichweite dar". Beispiel: „$\neg(x \varepsilon x)$ ist eine zulässige Aussageform", aber es existiert „keine Klasse von dieser Art". Dagegen existiert sehr wohl „die Klasse aller *Mengen*, die keine Selbstelemente sind" (charakterisiert durch die Aussageform $\neg\, x \varepsilon x \wedge Mg\,x$). Aber „diese Klasse ist eine Nichtmenge". In einem spezielleren Zusammenhang ähnlich: Durch bestimmte „Aussageformen werden zwar die *Eigenschaften* festgelegt, eine Korrespondenz, eine Funktion oder eine Relation zu sein, es darf aber nicht nur nicht von der Menge aller Korrespondenzen, Funktionen und Relationen gesprochen werden, sondern nicht einmal von der *Klasse* aller Relationen, der *Klasse* aller Funktionen oder der *Klasse* aller Korrespondenzen"[12a]. — Hier werden Unterscheidungen mit quasi-ontologischer Valenz postuliert, ontologische Differenzen, deren Status ungeklärt bleibt[12b] — Eigenschaften, denen keine Klasse entspricht, Klassen, die keine Mengen sind, Nichtmengen, die als solche aber nicht als Elemente einer *Klasse* der Nichtmengen aufgefaßt werden dürfen: Solange sich derartige Unterscheidungen ohne Not vermeiden lassen (das wäre zu klären), fällt es zumindest schwer, sie als plausibel zu akzeptieren. Das Antinomienproblem kann in dieser Weise zwar axiomatisch *beseitigt* werden (freilich auch nur mit sehr eingeschränkter Geltungsreichweite, cf. § 11), aber der Nachweis, daß es anders — harmloser — nicht geht, steht aus.

13. Franz v. Kutschera hält es deshalb für angemessener, statt mehr oder weniger ad hoc arrangierter Vermeidungsstrategien zunächst „eine intuitive *Erklärung* für die Antinomien (zu) suchen und die Modifikationen des Systems dann so (zu) fassen, daß genau die aufgedeckten Fehler ausgeschaltet werden"[13a]. v. Kutschera selbst kommt zu dem Ergebnis, daß das sog. „*Circulus-vitiosus-Prinzip*", wie es in anderer Form bereits von Russell/Whitehead zur

[11c] Stegmüller MENGENLEHRE 75.
[12a] Stegmüller MENGENLEHRE 73, 75, 90.
[12b] Dasselbe läßt sich von Quines Unterscheidung von „set" und „ultimate class" sagen, die der hier vorliegenden Unterscheidung von „Menge" und „Nichtmenge" entspricht (Quine SET XI, 3).
[13a] v. Kutschera ANTINOMIEN 14.

Erklärung der Antinomien herangezogen worden war[13b], hier eine entscheidende Rolle spielt. Es besagt, daß „Entitäten, die ihre eigene Existenz zur Voraussetzung ihrer Konstruierbarkeit haben, nicht als existierend angenommen werden dürfen". v. Kutschera weist dann nach, daß durchweg *alle* Antinomien durch „bedeutungsabhängige" Begriffe entstehen, die insbesondere „fehlerhaft zirkulär" und darum „tatsächlich bedeutungslos sind"[13c]. Um das Gemeinte zu veranschaulichen, betrachten wir noch einmal das Beispiel der Grellingschen Antinomie: Der Ausdruck „heterologisch" bezeichnet definitionsgemäß alle nichtselbstbezüglichen Ausdrücke (cf. § 6). Aber was gilt für „heterologisch" selbst? Wird ihm zunächst hypothetisch die Eigenschaft „nichtselbstbezüglich" zugeordnet, so ergibt sich im Widerspruch dazu, daß er selbstbezüglich ist. Wird ihm umgekehrt die Eigenschaft „selbstbezüglich" hypothetisch zugeordnet, so ist dadurch das kontradiktorische Gegenteil, „nichtselbstbezüglich", impliziert. Kurz, ist eine der beiden Eigenschaften für den Ausdruck „heterologisch" realisiert, so wirkt diese gleichsam auf sich selbst zurück und schlägt in ihr kontradiktorisches Gegenteil um, dem freilich unmittelbar dasselbe widerfährt. Die Existenz der jeweiligen Eigenschaft wird sofort zur Ursache ihrer eigenen Nichtexistenz, und v. Kutschera hat recht, wenn er hier eine „Zirkularität" konstatiert. Er nennt sie „fehlerhaft", eben weil jeder Zustand sein kontradiktorisches Gegenteil impliziert[13d].

14. Wir halten diese Erklärung für zutreffend. v. Kutscheras Schluß, daß derartige „Entitäten" folglich „bedeutungslos" seien und darum „nicht als existierend angenommen werden dürfen"[14a], glauben wir allerdings *nicht* akzeptieren zu können. Und zwar deshalb nicht, weil das von v. Kutschera als „fehlerhafte Zirkularität" charakterisierte Phänomen im Sinne der Systemtheorie auch als (negative) *Rückkopplung* zu deuten ist und damit eins der fundamentalsten Funktionsprinzipien realer (natürlicher und geistiger) Systeme repräsentiert. Vermittels Rückkopplung kann ein Zustand (im weitesten Sinne) auf sich selbst zurückwirken und so gleichsam zur Ursache seiner selbst werden[14b]. Aber das macht einen solchen Vorgang nicht „bedeutungslos". Vom elektrischen Unterbrecher („Klingel") bis hin zum stabilitätsorientierten Verhalten von organismischen, technischen und schließlich selbst „reflexiven" Systemen mit „Ichgewißheit" erweist sich „Rückkopplung" als universales Prinzip[14c]. Zuge-

[13b] Russell/Whitehead PM 37.
[13c] v. Kutschera ANTINOMIEN 15, 61 f., 16.
[13d] „Zirkularität" als solche hat noch nichts Anstößiges für die Logik. Stegmüller weist darauf hin, daß auch die Mathematik von zirkulären Verfahren Gebrauch macht, z. B. beim Beweis des Zwischenwertsatzes (Stegmüller METAPHYSIK 233). Ähnlich Quine: zirkulär ist bereits das Verfahren of „singling out an individual as the most typical Yale man on the basis of averages of Yale scores *including his own*" (meine Hervorhebung) (Quine SET 243).
[14a] v. Kutschera ANTINOMIEN 15.
[14b] Dasselbe findet sich übrigens schon bei Russell ausgedrückt, der, mit bezug auf eine Funktion, die sich gemäß $\phi\,\{f(\phi)\}$ selbst als Argument enthält, feststellt: „If here ϕ is varied, the argument is varied at the same time in a manner dependent upon the variation of ϕ" (Russell PRINCIPLES 104).
[14c] Hier kann eingewendet werden, daß durch Rückkopplung ja stets *zeitlich differente* Zustände eines Systems miteinander verknüpft sind und die kausale Struktur, obzwar zirkulär, eben darum *nicht* kontradiktorisch („fehlerhaft zirkulär") ist. Das ist sicher richtig, freilich mit dem Vorbehalt, daß der Zeitbegriff wohl selbst als erklärungsbedürftig angesehen werden kann: Warum wird ein Zustand, der sich selbst aufhebt und in sein Gegenteil umschlägt, als zeitlich von diesem getrennt betrachtet?

geben: die für Antinomien charakteristische, rückkopplungsartige Zirkularität ist *unbeabsichtigt* und darum mit sinnvollen Anwendungsfällen des Prinzips Rückkopplung nicht ohne weiteres zu entschuldigen. Aber es kann ebensowenig befriedigen, wenn solche Phänomene generell als „bedeutungslos" disqualifiziert werden. Wir meinen vielmehr, daß der Kritik an den fraglichen (antinomischen) Definitionen ein Vorschlag zur Revision folgen müßte, genauer: Ebenso wie v. Kutschera sehen wir in der vorgängigen *Klärung* des Antinomienproblems die unbedingte Voraussetzung für seine Lösung. Die von v. Kutschera selbst vorgelegte Erklärung — fehlerhaft zirkuläre Begriffe — bleibt aber vordergründig, weil sie nur die *Tatsache* einer fehlerhaften Zirkularität konstatiert, aber nicht nach den Bedingungen ihres Auftretens weiterfragt. Dieses ist aber nötig, um, wie v. Kutschera selbst zu Recht erklärt, „die Modifikationen des Systems . . . so fassen" zu können, „daß genau die aufgedeckten Fehler ausgeschaltet werden"[14d]. Eben dies soll das leitende Interesse der folgenden Untersuchungen sein.

15. Wir gehen wieder von dem „naiven" Komprehensionsschema $\bigvee_y \bigwedge_x x \varepsilon y \longleftrightarrow \phi(x)$ aus. Es besagt, daß $x \varepsilon y$ genau dann gilt, wenn x die Bedingung ϕ erfüllt, mit anderen Worten, der Ausdruck $x \varepsilon y$ wird durch $\phi(x)$ definiert, $x \varepsilon y$ ist Definiendum, $\phi(x)$ das zugeordnete Definiens. Es kann nun, so argumentieren wir weiter, offenbar nicht in der Absicht einer Definition liegen, einen Widerspruch zu ermöglichen, d. h. ein Ausdruck $\phi(x)$ kann nur dann als Definiens eingeführt werden, wenn Inkonsistenzen mit dem Definiendum von vornherein und mit Sicherheit auszuschließen sind. Diese an sich natürliche Bedingung, daß Definiens und Definiendum für kein x kontradiktorisch werden, symbolisch[15a]

$$(15.1) \qquad \neg\,(\phi(x) \Leftrightarrow \neg\, x \varepsilon y),$$

ist beim Auftreten von Antinomien offenbar nicht mehr erfüllt. Wir erinnern an die eingangs betrachteten Beispiele: Wer seine Bescheidenheit laut verkündet, verstößt jedenfalls in *diesem* Punkt *gegen* den Begriff der Bescheidenheit. Wer auf die Frage „schläfst du?" mit Ja antwortet, schläft *nicht* mehr. Die Aussage „ich verrate dir nicht, daß ich Fritz heiße", verrät dies, ihrer unmittelbaren Intention zuwiderlaufend, doch, usw.: Dieses Kontradiktorischwerden von Realisierungs*bedingung* und *Realisierung* (bzw. von Definiens und Definiendum) scheint das *Grundphänomen* beim Auftreten von Antinomien zu sein. Und um hier den Hebel anzusetzen, werden wir nun nicht mehr einfach $\phi(x)$, sondern dieses grundsätzlich nur in Konjunktion mit der „*Konsistenzbedingung*" (15.1) als Definiens für $x \varepsilon y$ akzeptieren. Wir erhalten so das modifizierte Komprehensionsschema

$$(15.2) \qquad \bigvee_y \bigwedge_x x \varepsilon y \longleftrightarrow \big(\phi(x) \wedge (\phi(x) \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, x \varepsilon y)\big),$$

in Worten, es gibt ein y, so daß für alle x gilt: x ist Element von y genau dann, wenn $\phi(x)$ gilt *und sofern* $\phi(x)$ *nicht logisch äquivalent* $\neg\, x \varepsilon y$ *ist.*

Vielleicht, *damit* die Kontradiktion vermieden ist. Zeit, so verstanden, wäre dann gleichsam eine Optik, die räumlich Unvereinbares in eine neue Dimension auseinanderzieht, das erst dadurch („zu verschiedenen Zeiten") widerspruchsfrei zusammenbestehen kann. So betrachtet wäre das Zeitargument weniger als Einwand, sondern eher umgekehrt als Hinweis auf ein Zeit*problem* zu nehmen.

[14d] v. Kutschera ANTINOMIEN 14.

[15a] Die hier verwendete Verknüpfung $A \Leftrightarrow B$ drückt aus, daß die Sätze A und B „logisch äquivalent" sind. Dies bedeutet, daß die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ logisch wahr, d. h. bei jeder beliebigen Wahrheitswertbelegung von A (oder B) gültig ist. Rein syntaktisch ist $A \leftrightarrow B$ in diesem Fall als „beweisbarer Ausdruck" oder „Theorem" zu qualifizieren. — Eine ausführliche Erörterung des Begriffs „logische Äquivalenz" würde hier zu weit führen. Stattdessen sei etwa auf Carnaps Untersuchungen hierzu in MEANING verwiesen.

16. (15.2) hat die folgenden Eigenschaften: Ist die Konsistenzbedingung $\phi(x) \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, x \varepsilon y$ erfüllt, so wird (15.2) mit dem naiven Komprehensionsschema $\bigvee_y \bigwedge_x x \varepsilon y \longleftrightarrow \phi(x)$ identisch. Das gilt jetzt sogar noch für die „kritische" Aussageform $\phi(x) = \neg\, x \varepsilon x$, falls außerdem $x \neq y$ erfüllt ist. Ist $x \varepsilon y$ aber nicht erfüllt — dies war früher der Fall der *Russellschen Antinomie* — so geht $\phi(x) \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, x \varepsilon y$ in den logisch falschen Ausdruck $\neg\, y \varepsilon y \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, y \varepsilon y$ über, die rechte Seite der Äquivalenz (15.2) wird damit falsch, mithin auch die linke, und es folgt $\neg\, y \varepsilon y$. Das mag zunächst überraschen, denn mit $\neg\, y \varepsilon y$ scheint y selbst die Bedingung $\phi(x)$ $(= \neg\, x \varepsilon x)$ zu erfüllen und damit selbst zur Klasse der Nichtselbstelemente zu gehören: $y \varepsilon y$, und das wäre eben doch wieder die Russellsche Antinomie $y \varepsilon y \longleftrightarrow \neg\, y \varepsilon y$. Aber diese Interpretation ist unzutreffend. Entsprechend (15.2) ist y nicht schlicht als die Klasse der Nichtselbstelemente definiert. Es ist diese Klasse nur, sofern *auch* $\neg\, x \varepsilon x \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, x \varepsilon y$ oder $x \neq y$ ist. Und das Ergebnis $\neg\, y \varepsilon y$ besagt andererseits, daß y selbst dieser Klasse nicht angehört, d. h. daß y selbst zwar ein Nichtselbstelement x ist, aber *kein* solches, für das zugleich $x \neq y$ gilt. Anders gesagt: y enthält nur „*die anderen*" x (also ohne y selbst), die Nichtselbstelemente sind, $\neg\, x \varepsilon x \wedge x \neq y$, während für y selbst andererseits $\neg\, x \varepsilon x \wedge \neg\, (x \neq y)$ gilt. — Das naive Komprehensionsschema ist also so modifiziert worden, daß der Russellsche Widerspruch automatisch verhindert wird. Zugleich ist die Modifikation so schwach, daß *genau* dieser Fall ausgeschlossen wird. Alle sinnvollen Fälle, z. B. auch $\phi(x) = \neg\, x \varepsilon x$ für $x \neq y$ (was durch die Typeneinteilung ehedem mit ausgeschlossen war) bleiben jetzt erhalten. Das hier eingeführte Definitionsschema (15.2) ist *andererseits* auch gegenüber der axiomatischen Mengenlehre im Vorteil: Der im Russellschen Fall resultierende Term $\neg\, Mg\, y$ (cf. § 10, hier mit y statt N) besagte ja, daß *keine* Klasse existieren könne, der y als Element angehört — ein unvorstellbarer Sachverhalt (cf. § 11). In dem hier skizzierten Rahmen dagegen verhält sich y „normal", es selbst kann ohne Widerspruch als Element anderer Klassen bestimmt werden. Da y z. B. so etwas wie ein „Konstrukt" ist, wird man es als Element der „Klasse der Konstrukte" betrachten dürfen. Ferner: weder x noch $\phi(x)$ unterliegen hier irgendwelchen Einschränkungen. Daß die freie Wählbarkeit von x und $\phi(x)$ gleichwohl nicht zu Widersprüchen führt, ist, wie gesagt, durch die Zusatzbedingung (15.1) sichergestellt, die automatisch nur die *nicht* zum Widerspruch führenden Aussageformen $\phi(x)$ „zum Zuge" kommen läßt. Da sich eine Unterscheidung von „Klassen" und „Mengen" unter diesen Umständen erübrigt, werden wir beide Begriffe wieder synonym verwenden.

17. Wir hatten früher kritisiert, daß Vermeidungsstrategien wie die Typentheorie, die axiomatische Mengenlehre oder die Hierarchie der Metasprachen nicht

nur unplausible Konsequenzen haben, sondern ebenso, daß sie einseitig nur auf ein beschränktes Problem zugeschnitten sind und vor wesentlich gleich strukturierten Problemen kapitulieren (cf. § 8). Um nicht der eigenen Kritik anheimzufallen, wollen wir den hier zunächst für die Russellsche Aninomie skizzierten Ansatz auf verwandte Strukturen übertragen, was durch eine Verallgemeinerung des diskutierten Verfahrens leicht möglich ist: Statt des speziellen Definitionsschemas (15.2) legen wir jetzt ein verallgemeinertes Schema

$$\text{(17.K)} \qquad \bigvee_{y} \bigwedge_{x} \Psi(x,y) \longleftrightarrow \big(\Phi(x) \wedge (\Phi(x) \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, \Psi(x,y))\big)$$

zugrunde. Durch das Konjunktionsglied $\Phi \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\,\Psi$ ist auch hier wieder Konsistenz im Verhältnis von Definiens ($\Phi(x)$) und Definiendum ($\Psi(x,y)$) gewährleistet. Daher die begründete Hoffnung, daß mit diesem Definitionsschema, das wir kurz als „*Konsistenzschema*" bezeichnen wollen, antinomische Gebilde, *gleich welcher Art*, schon im Ansatz vermieden sind. Zum Methodischen ist anzumerken, daß wir $\Phi \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\,\Psi$ grundsätzlich als gültig ansetzen, außer wenn daraus ein Widerspruch folgt bzw. $\Phi(x) \longleftrightarrow \neg\,\Psi(x,y)$ ein Theorem ist. Im Augenblick nur soviel. In § 23 wird zum Grundsätzlichen von Form und Funktion des Konsistenzschemas noch einiges zu sagen sein. Wir testen (17.K) zunächst an drei weiteren bekannten Antinomien, der Grellingschen, Cantorschen und der Wahrheitsantinomie.

18. *Grellings Antinomie.* Wir vereinbaren wie früher (cf. § 6), daß $\underline{x}$ die Namensbezeichnung für die Menge der Gegenstände mit der Eigenschaft x sein soll. Mit $\Psi(x,y) = x \varepsilon y$ und $\Phi(x) = \neg\, x \varepsilon x$ (und mit *het* für „heterologisch") ergibt sich aus dem Konsistenzschema dann

$$\text{(18.1)} \qquad \bigwedge_{x} \underline{x}\, \varepsilon\, \mathit{het} \longleftrightarrow \big(\neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, x \wedge (\neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, x \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, \mathit{het})\big),$$

was für $x \neq$ het mit dem naiven Schema $\bigwedge_{x} \underline{x}\, \varepsilon\, \mathit{het} \longleftrightarrow \neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, x$ identisch ist und für den kritischen Fall $x = \mathit{het}$

$$\text{(18.2)} \qquad \underline{\mathit{het}}\, \varepsilon\, \mathit{het} \longleftrightarrow \big(\neg\, \underline{\mathit{het}}\, \varepsilon\, \mathit{het} \wedge (\neg\, \underline{\mathit{het}}\, \varepsilon\, \mathit{het} \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, \underline{\mathit{het}}\, \varepsilon\, \mathit{het})\big)$$

liefert. Mit $\neg\, \underline{\mathit{het}}\, \varepsilon\, \mathit{het} \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, \underline{\mathit{het}}\, \varepsilon\, \mathit{het}$ ist die rechte und damit auch die linke Seite von (18.2) ungültig, und wir erhalten für $x = \mathit{het}$

$$\text{(18.3)} \qquad \neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, x \wedge \neg\, (x \neq \mathit{het}),$$

während für alle anderen $\underline{x}$ mit der Eigenschaft *het* $\neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, x \wedge (x \neq \mathit{het})$ gilt. Insgesamt: $\underline{x}$ ist heterologisch, wenn $\underline{x}$ nicht selbst x und zugleich x von der definierten Eigenschaft „heterologisch" verschieden ist. Der Name „$\underline{\mathit{het}}$" für die Eigenschaft „heterologisch" selbst besitzt nach (18.3) zwar ebenfalls nicht die ihm bezeichnete Eigenschaft („heterologisch") — insofern gilt zunächst dasselbe wie für die eben charakterisierten $\underline{x}$ —, aber diese bezeichnete und $\underline{\mathit{het}}$ nicht zukommende Eigenschaft ist nun *nicht* mehr verschieden von der zu definierenden Eigenschaft „heterologisch": das ist der Unterschied gegenüber den „normalen" x, und genau deshalb besitzt $\underline{\mathit{het}}$ selbst *nicht* die Eigenschaft *het*, wie sie den normalen x mit $\neg\, \underline{x}\, \varepsilon\, x$ zukommt.

19. Die *Wahrheitsantinomie* kann umgangssprachlich durch den Satz „dieser Satz ist falsch" wiedergegeben werden. Um die Antinomie formal zu rekon-

struieren, sei S_n die Abkürzung für „Satz mit der Eigenschaft n". (Damit ist gemeint, daß S_n z. B. an n-ter Stelle einer lexikografischen Anordnung der Sätze steht, o. ä). Im Sinne der Wahrheitskonvention kann nun der Prädikator „falsch" durch den Ausdruck

$$\text{(19.1)} \qquad \bigwedge_{n} S_n\, \varepsilon\, f \longleftrightarrow \neg\, S_n$$

eingeführt werden[19c]. Durch Allspezialisierung wird insbesondere

$$\text{(19.2)} \qquad S_i\, \varepsilon\, f \longleftrightarrow \neg\, S_i,$$

wobei wir jetzt annehmen (was durch geeignete Wahl von i immer möglich ist), daß $S_i\, \varepsilon\, f$ selbst der Satz mit der Eigenschaft i ist. Mit dieser Identifizierung von $S_i\, \varepsilon\, f$ und S_i geht (19.2) jedoch in den kontradiktorischen Ausdruck $S_i \longleftrightarrow \neg\, S_i$ bzw.

$$\text{(19.3)} \qquad S_i\, \varepsilon\, f \longleftrightarrow \neg\, S_i\, \varepsilon\, f$$

über. Dies ist eine mögliche Rekonstruktion der Wahrheitsantinomie. Tarskis klassische Lösung der Wahrheitsantinomie geht von der Aufspaltung der Sprache in *Objekt- und Metasprache* aus.[19a] Eine Falschheitsaussage wie $S_i\, \varepsilon\, f$ wird der Metasprache zugerechnet, während das Objekt S_i dieser Falschheitsaussage zur Objektsprache zählt. Die Identifizierung von $S_i\, \varepsilon\, f$ und S_i, die zur Kontradiktion führte, ist bei dieser Aufsplitterung der Sprache also nicht mehr möglich, die metasprachliche Falschheitsaussage kann sich nicht selbst zum Objekt haben. Eine so angesetzte Lösung der Antinomie hat nun freilich zur Folge, daß nicht nur für Wahrheits- oder Falschheitsaussagen, sondern *generell für alle* Aussagen gilt, daß sie sich nicht auf sich selbst beziehen können. Ein derartiges Generalverbot jeder Art von Selbstrückbezüglichkeit oder, in anderer Formulierung, die „Preisgabe der semantischen Geschlossenheit" von Sprache (Tarski), ist zweifellos eine mißliche und einschneidende Konsequenz des Tarskischen Vorgehens — wir hatten darauf bereits in § 7 hingewiesen. Aus diesem Grunde ist es naheliegend, wenn etwa Kuno Lorenz wieder das alte, schon von Russell her bekannte „*Zirkelverbot*" für Wahrheits- und Falschheitsaussagen favorisiert, das *nur für diese* die Selbstanwendung verbietet.[19b]

20. Wird dagegen das Konsistenzschema zugrunde gelegt, so bedarf es weder der Metasprachenhierarchie noch des Zirkelprinzips zur Vermeidung der Wahrheitsantinomie: Statt von (19.1) haben wir jetzt von der modifizierten Form

$$\text{(20.1)} \qquad \bigwedge_{n} S_n\, \varepsilon\, f \longleftrightarrow \neg\, S_n \wedge (\neg\, S_n \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\, S_n\, \varepsilon\, f)$$

auszugehen. Durch Allspezialisierung entsteht (unter Weglassen der doppelten Negation in der Klammer)

$$\text{(20.2)} \qquad S_i\, \varepsilon\, f \longleftrightarrow \neg\, S_i \wedge (S_i \Leftarrow\!|\!\Rightarrow S_i\, \varepsilon\, f).$$

Wird wie vorher $S_i\, \varepsilon\, f$ wieder mit S_i identifiziert, so ist die in der Klammer stehende Konsistenzbedingung *nicht* mehr erfüllt. Gleichwohl ist die Antinomie nun nicht mehr ableitbar. Hier wird klar, daß das Zirkelverbot als solches un-

[19a] Cf. Tarski WAHRHEITSBEGRIFF und Stegmüller WAHRHEITSPROBLEM.

[19b] Kuno Lorenz ELEMENTE 44 f.

[19c] Hierbei ist $S_n\, \varepsilon\, f$ als ein Satz zu verstehen, der eine Falschheitsaussage über den Satz S_n macht. Insofern wäre die umständlichere Schreibweise „S_n" $\varepsilon\, f$ naheliegend, auf die hier jedoch ohne Risiko verzichtet werden kann.

nötig ist: deshalb nämlich, weil die Konsistenzbedingung in (20.1), also der Ausdruck

(20.3) $S_n \Leftarrow\mid\Rightarrow S_n \varepsilon f$,

selbst das Zirkelverbot *ist* — (20.3) besagt ja, daß S_n und $S_n \varepsilon f$ für kein n identifiziert werden dürfen. Im Falle $n = i$ ist zwar gegen das Zirkelverbot verstoßen, aber auch dieser Fall ist in der Formulierung (20.1) schon antizipiert, so daß insgesamt kein Widerspruch auftritt. Das Zirkelverbot braucht also nicht *eigens gefordert* zu werden, weil es im Konsistenzschema bereits als Spezialfall enthalten ist. Zusammenfassend läßt sich somit sagen, daß weder die strikte Trennung von Objektsprache und Metasprache noch ein besonderes „Zirkelprinzip" nötig ist, um Antinomien wie die Wahrheitsantinomie zu vermeiden. Das Konsistenzschema, mechanisch angewendet, ist auch in diesem Fall völlig zureichend. Eine Konsequenz für die Sprachtheorie liegt auf der Hand: Auch in künstlichen Sprachen sollte es möglich sein, in einer Sprache (mit entsprechend reichen Ausdrucksmitteln) uneingeschränkt über diese Sprache selbst zu sprechen — ein Umstand, der auch die Gödel-Tarskische »Unentscheidbarkeitsproblematik" in einem neuen Licht erscheinen lassen muß. Wir können diese Frage hier allerdings nicht weiterverfolgen.

21. Die *Cantorsche Antinomie* soll ebenfalls nur skizziert werden, eine ausführliche Darstellung findet sich z. B. bei v. Kutschera ANTINOMIEN 34 f. Der Grundgedanke der Konstruktion ist der, daß aus der Annahme, es gäbe eine Äquivalenzrelation $E(M, P_M)$ zwischen einer Menge M und deren Potenzmenge P_M (= die Menge aller Teilmengen von M) ein Widerspruch, eben die Cantorsche Antinomie, abgeleitet wird: Die Existenz der Äquivalenzrelation $E(M, P_M)$ würde die Konstruktion einer umkehrbar eindeutigen Relation R zwischen M und P_M garantieren, so daß einem Element x aus M umkehrbar eindeutig ein Bildelement Rx aus P_M zugeordnet ist. Als Element aus P_M ist Rx aber seinerseits eine Teilmenge von M, für die als solche gelten muß, daß sie x (d. h. das Urbild von Rx in M) entweder als Element enthält oder nicht enthält, $x \varepsilon Rx$ *oder* $\neg x \varepsilon Rx$. Wir definieren nun eine Teilmenge U von M, die als Teilmenge von M zugleich ein Element von P_M ist und als solches wiederum ein Urbild, etwa u, in M besitzt, so daß also $U = Ru$ gesetzt werden kann. Definierende Bedingung für U bzw. Ru sei nun gerade der schon erörterte Ausdruck $\neg x \varepsilon Rx$. Naive Komprehension ergibt somit

(21.1) $\bigwedge\limits_x x \varepsilon Ru \longleftrightarrow \neg x \varepsilon Rx$,

woraus für $x = u$ der Cantorsche Widerspruch

(21.2) $u \varepsilon Ru \longleftrightarrow \neg u \varepsilon Ru$

folgt. Bei Cantor wird daraus weiter geschlossen, daß die ursprünglich gemachte Existenzannahme für die Äquivalenzrelation $E(M, P_M)$ zwischen einer Menge M und ihrer Potenzmenge P_M damit widerlegt sei, woraus weiter für die zugeordneten Kardinalzahlen die Kleinerrelation

(21.3) $\bigwedge\limits_M K(M) < K(P_M)$

abgeleitet wird. Dieses Ergebnis führt nun *ebenfalls* zu einem Widerspruch,

nämlich dann, wenn die beliebig gewählte Menge M als *Allmenge* V interpretiert wird: V ist definiert als diejenige Menge, die *alle* x als Element enthält, anders gesagt, alle Elemente einer beliebigen Menge M sind auch Elemente von V, und das bedeutet gerade, daß jede beliebige Menge M eine Teilmenge von V ist, $\bigwedge\limits_M M \subseteq V$. Also müßte auch die Potenzmenge P_V von V eine Teilmenge von V sein, $P_V \subseteq V$, woraus für die zugehörigen Kardinalzahlen

(21.4) $K(P_V) \leq K(V)$

folgen würde: im Widerspruch zu der aus (21.3) folgenden Beziehung

(21.5) $K(P_V) > K(V)$.

Die Antinomie besteht also darin, daß sowohl die Annahme des Bestehens wie des Nichtbestehens einer Äquivalenzrelation $E(M, P_M)$ zu einem Widerspruch führt.

22. Wir können demgegenüber zeigen, daß der Cantorsche Widerspruch im Rahmen des Konsistenzschemas *nicht* mehr abgeleitet werden kann: Mit $\Psi(x, U) = x \varepsilon U$ und $\Phi(x) = \neg x \varepsilon Rx$ erhalten wir aus (17.K)

(22.1) $\bigvee\limits_U \bigwedge\limits_x x \varepsilon U \longleftrightarrow \neg x \varepsilon Rx \wedge (\neg x \varepsilon Rx \Leftarrow\mid\Rightarrow \neg x \varepsilon U)$,

wobei wir R als eindeutige Relation annehmen und zunächst offenlassen, ob diese auch umkehrbar eindeutig ist. Entsprechend der methodischen Vorbemerkung am Schluß von § 17 (siehe auch § 23) werden wir ferner davon ausgehen, daß die hier in Klammern stehende Konsistenzbedingung ($\neg x \varepsilon Rx \Leftarrow\mid\Rightarrow \neg x \varepsilon U$) erfüllt ist, außer wenn daraus ein Widerspruch folgt. Äquivalent mit diesem Ausdruck ist aber

(22.2) $\neg(Rx = U)$,

in Worten, für kein x ist $Rx = U$, anders gesagt, das Element U aus P_M besitzt *kein* Urbild u in M. In diesem Fall ist R also in der Tat keine umkehrbar eindeutige Relation. Für die Kardinalzahlen der Menge M und ihrer Potenzmenge P_M folgt dann wieder die Beziehung

(22.3) $K(M) < K(P_M)$,

die bei Cantor indirekt durch Widerlegung der Annahme einer umkehrbar eindeutigen Relation R abgeleitet worden war. Aber wohlgemerkt, dieses Resultat gilt hier nur unter der Voraussetzung, daß aus der Konsistenzbedingung (22.2) kein Widerspruch folgt. Für den Sonderfall, daß M die Allmenge V ist[22a], *ergibt* sich jedoch ein Widerspruch: Gemäß (22.3) würde einerseits $K(V) < K(P_V)$, nach (21.4) dagegen $K(V) \geq K(P_V)$ gelten. Aus diesem Widerspruch muß *jetzt* geschlossen werden, daß die Konsistenzbedingung (22.2) im Fall der Allmenge *nicht* erfüllt ist, d. h. U besitzt hier doch ein Urbild u mit $Ru = U$. Für die Allmenge V ist die Annahme einer umkehrbar eindeutigen Relation zwischen

[22a] Die Allmenge V ist im Rahmen des Konsistenzschemas etwa durch $\bigvee\limits_V \bigwedge\limits_z z \varepsilon V \longleftrightarrow [z = z \wedge (z = z \Leftarrow\mid\Rightarrow \neg z \varepsilon V)]$ zu definieren. Die Konsistenzbedingung $z = z \Leftarrow\mid\Rightarrow \neg z \varepsilon V$ kann ohne Widerspruch für alle z als gültig angenommen werden, so daß $z \varepsilon V$ für *alle* z gilt, also auch für $z = V$. Damit gilt aber auch $\bigwedge\limits_x \bigwedge\limits_z z \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon V$ dh $\bigwedge\limits_x x \subseteq V$ oder $\bigwedge\limits_x x \varepsilon P_V$ und damit schließlich $\bigwedge\limits_x x \varepsilon V \rightarrow x \varepsilon P_V$ oder $V \subseteq P_V$. Die Komplizierung, die im Fall der x entsteht, die Individuen sind, kann in dieser Skizze unberücksichtigt bleiben.

V und P_V dann zwingend. Und da sich überdies sowohl $P_V \subseteq V$ (s. o.) als auch $V \subseteq P_V$[22a] zeigen läßt, folgt für die Allmenge V die Gleichheit von V und P_V und schließlich auch ihrer Kardinalzahlen,

(22.4) $$K(V) = K(P_V).$$

Dieses „vernünftige" Resultat ist ermöglicht einmal durch die im vorliegenden Rahmen zulässige Geltung von $V \varepsilon V$ (cf. [22a]), vor allem aber durch die Destruktion der Cantorschen Antinomie mit der Konsequenz, daß $K(M) < K(P_M)$ jetzt nicht mehr *generell* ableitbar ist[22b]: Der für den singulären Fall der Allmenge aufgewiesene Widerspruch $K(V) \gtreqless K(P_V)$ bleibt im Rahmen des Konsistenzprinzips nicht als Widerspruch stehen, sondern schränkt nur den Geltungsbereich der Ungleichung $K(M) < K(P_M)$ ein.

23. Abschließend noch einige Bemerkungen zu Form und Funktion des Konsistenzprinzips. Das hier zugrundegelegte Definitionsschema $\Psi \longleftrightarrow \Phi \wedge$
(*) $(\Phi \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\Psi)$ besagt — um den Grundgedanken noch einmal zu formulieren —, daß wir nicht jeden Ausdruck Φ schlechthin als tauglich betrachten, Definiens eines zu definierenden Ausdrucks Ψ zu sein. Diese Tauglichkeit billigen wir grundsätzlich nur der Konjunktion

(23.1) $$\Phi \wedge (\Phi \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\Psi)$$

zu, für die *von vornherein feststeht,* daß sie — trivialerweise — in keinem Fall mit dem Definiendum Ψ in Widerspruch geraten kann: Ist die Konsistenzbedingung $\Phi \Leftarrow\!|\!\Rightarrow \neg\Psi$ erfüllt, so geht ~~(23.1)~~ in das klassische Definitionsschema $\Psi \longleftrightarrow \Phi$ über, das Definiendum und Definiens äquivalent setzt. Ist die Konsistenzbedingung dagegen *nicht* erfüllt, so gilt $\Phi \longleftrightarrow \neg\Psi$, was nun aber keinen Widerspruch, sondern lediglich $\neg\Psi$ zur Folge hat. Da die Äquivalentsetzung von Ψ und Φ als die leitende Absicht eines Definitionsaktes anzusehen ist, darf im Normfall vom Erfülltsein der Konsistenzbedingung, die diese Absicht nur noch einmal ausdrücklich macht, ausgegangen werden. Dies ist der Sinn der methodischen Regel am Schluß von § 17. Es *kann* freilich auch der Fall eintreten, das beweisen die Antinomien, daß Definiendum und Definiens kontradiktorisch werden, $\Psi \Leftrightarrow \neg\Phi$. Die mit der Definition ursprünglich verfolgte Absicht ist dann nicht realisierbar, die Konsistenzannahme für Ψ und Φ führt zum Widerspruch und ist dadurch widerlegt. In jedem Falle ist also zunächst von der Konsistenzannahme auszugehen, denn dies entspricht der Definitionsabsicht, und erst ein daraus resultierender Widerspruch zwingt dazu, diese Annahme aufzugeben.

Die Konsistenzbedingung, durch die das alte Definitionsschema hier eingeschränkt worden ist, gewährleistet so, daß über Definitionen, die ja unbeschränkt möglich sein sollen, keine Widersprüche *unabsichtlich in das System hineingelangen* können. Diese Bedingung, die wohl billigerweise zu fordern ist, kann

[22b] Quine weist in Fußnote 10 zu NF bereits darauf hin, daß Cantors Beweis im Fall der Allklasse möglicherweise nicht mehr zwingend ist, da eine umkehrbar eindeutige Relation zwischen V und P_V konstruierbar wäre, *sofern* die Existenz der Klasse jener x mit $\neg\, x \varepsilon x$ gesichert wäre — was wegen der Russellschen Antinomie allerdings nicht der Fall sei. Diese Schwierigkeit kann im Sinne des hier praktizierten Verfahrens aber als erledigt betrachtet werden, so daß $K(V) = K(P_V)$ auch durch Quines Überlegung gestützt erscheint.

in gewissem Sinne als formales Analogon jenes umgangssprachlichen Verhaltensmusters betrachtet werden, das von der grundsätzlichen *Unterstellung sinnvollen Redens* ausgeht. Mit dieser methodischen Voraannahme wird es ja möglich, auch scheinbar „sinnlose" Äußerungen eines Gesprächspartners noch zu „verstehen", als Kommunikations*störungen* nämlich, ohne daß es nötig wäre, die Kommunikationsmasse *im ganzen* zu verwerfen. Das geschieht erst dann, wenn diese Unterstellung sinnvollen Redens *nicht* mehr aufrechtzuerhalten ist, wenn die aufgetretenen Widersprüche also als Indiz für die *Inkompetenz* des Gesprächspartners gedeutet werden müssen[23a].

Zur Frage der Eliminierbarkeit ist folgendes anzumerken. Mittels (17.K) kann Ψ in Kontexten stets eliminiert und ersetzt werden: durch Φ, falls die Konsistenzbedingung erfüllt ist, andernfalls folgt die Geltung von $\neg\Psi$, so daß nun $\neg\Psi$ durch jeden beliebigen logisch gültigen Ausdruck ersetzbar ist.

24. Wir fassen zusammen: Die hier exemplarisch untersuchten Antinomien können sämtlich allein mit Hilfe des Konsistenzschemas (17.K) behoben werden. Wir sind der Meinung, daß sich diese Feststellung auf *alle* Antinomien ausdehnen läßt — nicht nur, weil bisher für keine der bekannten Antinomien (Burali-Forti, Richard, Quine, um nur einige zu nennen) Schwierigkeiten aufgetreten sind, sondern weil das Konsistenzschema gerade so konzipiert ist, daß die Entstehung antinomischer Gebilde von vornherein ausgeschlossen erscheint. Die Konsequenzen dieses Ansatzes liegen auf der Hand: (a) Weder die definierenden Aussageformen $\Phi(x)$ noch die x unterliegen irgendwelchen Einschränkungen. Damit entfallen (b) Typenregeln jeglicher Art, (c) desgleichen die strikte Trennung von Objekt- und Metasprache[24a] ebenso wie (d) die ontologisch fragwürdige Bewertung von Aussageformen, Klassen, Mengen (cf. § 12). Schließlich genügt (e) eine *einzige,* mechanisch anwendbare Strategie zur Vermeidung von Antinomien. Und nicht zuletzt werden (f) auch Konstrukte wie „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten" oder das Prädikat „heterologisch" nun nicht mehr als „bedeutungslos" verworfen, wie v. Kutschera dies tut, sondern als „normale" Gebilde akzeptierbar (mit geeigneten Kautelen, die aber in der Konsistenzbedingung bereits enthalten sind, cf. die Diskussion zu den einzelnen Antinomien). Es darf vermutet werden, daß mit diesem Ansatz Konsequenzen für die Sprachtheorie impliziert sind, etwa in dem Sinne, daß die geläufige These einer prinzipiellen Differenz von natürlichen und künstlichen Sprachsystemen so nicht haltbar ist: Tarskis Verbot der „semantischen Geschlossenheit" formaler Sprachen kann nicht mehr hingenommen werden, da sprachliche Selbstrückbezüglichkeit jetzt grundsätzlich als

[23a] Diesen Hinweis verdanke ich Professor Josef Simon, Tübingen.

[24a] Hier sollte betont werden, daß wir Prädikationsstufen („Typen") oder die Unterscheidung von Objekt- und Metasprache nicht etwa *generell* für sinnlos oder überflüssig halten. Aus „W ist ein Wiedertäufer" und „die Wiedertäufer sind eine christliche Sekte" folgt in der Tat nicht „W ist eine christliche Sekte" (cf. § 4). Ebenso muß es möglich sein (und das ist ja auch schon immer möglich gewesen), zwischen einem Ausdruck und seiner Bedeutung zu unterscheiden. Aber das sind semiotische Einzelfragen, die von hause aus freilich nicht das geringste mit *Antinomien* zu tun haben und darum Vermeidungsstrategien wie die Typentheorie oder die strikt durchgeführte Metasprachenhierarchie in keiner Weise motivieren können.

unbedenklich gelten darf und in bestimmten Fällen überhaupt unvermeidlich ist. Antinomien, soviel scheint deutlich zu sein, sind Folge eines solchen unvermeidlichen Selbstbezugs, der freilich nur darum antinomisch ist, weil er undurchschaut ist. Undurchschaut ist in diesem Fall die Rückwirkung eines Bedingten (Definiendum) auf die eigene Definitionsbedingung (Definiens): Daß ein Bedingtes zur Bedingung seiner eigenen Nichtexistenz werden könne, ist im „naiven" Definitionsschema nicht antizipiert. Kurz, Antinomien entstehen nicht schlicht durch „fehlerhafte Zirkularität", sondern Zirkularitäten können „fehlerhaft" werden, wenn das Bewußtsein möglicher Zirkularitäten überhaupt fehlt, und die Fehlerhaftigkeit liegt so an fehlender Vorsorge im formalen Konstruieren. — Daß ein Zusammenhang besteht zwischen dem Antinomienproblem und der Unentscheidbarkeits- und Unvollständigkeitsproblematik von Logiksystemen, ist bekannt[24b], und wir glauben — im Anschluß an die hier vorgetragenen Überlegungen — v. Kutschera darin zustimmen zu können, daß auch Gödels Unvollständigkeitsthese und verwandte Konstruktionen letztlich „nicht haltbar" sind[24c]. Präzisere Aussagen im Zusammenhang mit dem hier vorgelegten Ansatz müssen einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben[24d].

[24b] Cf. z. B. Nagel GÖDEL, Stegmüller WAHRHEITSPROBLEM oder UNVOLLSTÄNDIGKEIT.
[24c] v. Kutschera ANTINOMIEN 86, 90, 93.
[24d] Wandschneider, Zur Eliminierung des Gödelschen Unvollständigkeitsproblems im Zusammenhang mit dem Antinomienproblem. Ersch. 1975 in „Zeitschr. f. Allgem. Wissenschaftstheorie".

Literaturverzeichnis

Bocheński, I. M.
LOGIK — *Formale Logik.* Frbg./Mnch. 1956.

Carnap, Rudolf
MEANING — *Meaning and Necessity.* 1947. The University of Chicago Press. 2. Aufl. 1958.

Essler, Wilhelm K.
LOGIK — *Einführung in die Logik.* 1966. 2., erweit. Aufl. Stg. 1969.

Fuchs, Walter R.
MATHEMATIK — *Knaurs Buch der modernen Mathematik.* Mnch./Zürich 1966.

Grelling, K./Nelson, L.
PARADOXIEN — „Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti". In: *Abhandlungen der Fries'schen Schule* 2 (1907/08), 301—334.

Käsbauer, M./Kutschera, F. v. (ed.)
LOGIKKALKÜL — *Logik und Logikkalkül.* Festschrift zum 70. Geburtstag von W. Britzelmeyer. Frbg./Mnch. 1962.

Kutschera, Franz v.
ANTINOMIEN — *Die Antinomien der Logik. Semantische Untersuchungen.* Frbg./Mnch. 1964.

Lorenz, Kuno
ELEMENTE — *Elemente der Sprachkritik. Eine Alternative zum Dogmatismus und Skeptizismus in der analytischen Philosophie.* Ffm. 1970.

Nagel, E./Newman, J. R.
GÖDEL — *Der Gödelsche Beweis.* Wien/Mnch. 1964.

Quine, Willard van Orman
NF — *New Foundations for Mathematical Logic.* 1937. Erweiterte Fassung in: Quine POINT. 1961.
ML — *Mathematical Logic.* 1940. Revised Edition Cambridge 1951.
POINT — *From a Logical Point of View. 9 Logico-Philosophical Essays.* 1953. Second Edition, revised. Cambridge, Mass. 1961.
SET — *Set Theory and its Logic.* 1963. Revised Edition, Cambridge, Mass. 1969.
PARADOX — *The Ways of Paradox and Other Essays.* New York 1966.

Ramsey, F. P.
FOUNDATIONS — „The Foundations of Mathematics". 1925. In: Ramsey, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays.* 4. impression London 1965.

Russell, Bertrand
PRINCIPLES — *The Principles of Mathematics.* 1903. 8. Aufl. London 1964.

Russell, B./Whitehead, A. N.
PM — *Principia Mathematica.* 1910—1913. Second Edition. Cambridge 1963.

Sluga, Hans-Dieter
FREGE — „Frege und die Typentheorie. Eine historische Untersuchung". In: Käsbauer/Kutschera (ed.) LOGIKKALKÜL 1962.

Stegmüller, Wolfgang
METAPHYSIK — *Metaphysik, Skepsis, Wissenschaft.* 1954. 2., verbesserte Aufl. Bln. Heidelbg. N. Y. 1969.
WAHRHEITSPROBLEM — *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik. Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap.* Wien 1957.
UNVOLL — *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung.* Wien 1959.
MENGENLEHRE — „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, beruhend auf den Systemen von Bernays und Quine". In: Käsbauer/Kutschera (ed.) LOGIKKALKÜL 1962.

Tarski, Alfred
WAHRHEITSBEGRIFF — „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen". 1936. Englische Übersetzung in: Tarski; *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938.* Oxford 1956.

Wittgenstein, Ludwig
TRAKTAT — *Tractatus logico-philosophicus.* Logisch-philosophische Abhandlung. 1921. Ffm. 1960.